

Odpowiedzi do zadań domowych

1. Pochodne funkcji wielu zmiennych

$$1) u(x, y) = 4x^3 - 2xy^2 + 20 \ln y$$

$$u_x = 12x^2 - 2y^2$$

$$u_y = -4xy + \frac{20}{y}$$

$$u_{xx} = 24x$$

$$u_{yy} = -4x - \frac{20}{y^2}$$

$$u_{xy} = u_{yx} = -4y$$

$$2) u(x, y) = -10 \cos(5y) + 3e^{2x}$$

$$u_x = 6e^{2x}$$

$$u_y = 50 \sin(5y)$$

$$u_{xx} = 12e^{2x}$$

$$u_{yy} = -250 \cos(5y)$$

$$u_{xy} = u_{yx} = 0$$

$$3) u(x, y) = \sin(xy) \cdot 3x$$

$$u_x = 3xy \cdot \cos(xy) + 3 \sin(xy)$$

$$u_y = 3x^2 \cos(xy)$$

$$u_{xx} = 6y \cdot \cos(xy) - 3xy^2 \cdot \sin(xy)$$

$$u_{yy} = -3x^3 \sin(xy)$$

$$u_{xy} = u_{yx} = 6x \cdot \cos(xy) - 3x^2y \cdot \sin(xy)$$

$$4) u(x, y) = \frac{y^3 + x^2}{6x}$$

$$u_x = \frac{x^2 - y^3}{6x^2}$$

$$u_y = \frac{y^2}{2x}$$

$$u_{xx} = \frac{y^3}{3x^3}$$

$$u_{yy} = \frac{y}{x}$$

$$u_{xy} = u_{yx} = -\frac{y^2}{2x^2}$$

2. Uproszczone równania różniczkowe cząstkowe I i II rzędu

$$1) u(x, y) = 2x^2y^2 + 6y + F(x)$$

$$2) u(x, y) = 3x^2 \cos y - x^5y^2 + x \cdot F(y) + G(y)$$

$$3) u(x, y) = 3ye^x - \frac{x^2y^2}{2} + G(x) + H(y)$$

$$G(x) = \int F(x) dx$$

$$4) u(x, y) = e^x \cdot H(y) + K(x)$$

$$H(y) = \int G(y) dy$$

$$G(y) = e^{F(y)}$$

3. Równania różniczkowe cząstkowe I rzędu

$$1) u(x, y) = F(y^2 - x^3) \quad F \in C^1$$

$$2) u(x, y) = F\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right) \quad F \in C^1$$

3) Postać uwikłana :

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{\sqrt{u}}{y}\right) = 0 \quad F \in C^1$$

Postać jawna :

$$u(x, y) = \left(y \cdot F\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$$

4) Postać uwikłana :

$$F\left(e^y - \frac{x^2}{2}, \ln|u| - y\right) = 0 \quad F \in C^1$$

Postać jawna :

$$u(x, y) = e^{F\left(e^y - \frac{x^2}{2}\right) + y}$$

5) Postać uwikłana :

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{2xy} + \frac{1}{u}\right) = 0 \quad F \in C^1$$

Postać jawna :

$$u(x, y) = \frac{1}{F\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2xy}}$$

4. Równania różniczkowe cząstkowe liniowe II rzędu

$$1) u(x, y) = G(y - 3x) + H(3y - x) \quad G, H \in C^2$$

$$\text{gdzie } G(\xi) = \int F(\eta) d\eta$$

$$2) u(x, y) = F(y + 3x) \cdot x + G(y + 3x) \quad F, G \in C^2$$

3) Postać kanoniczna :

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0$$

$$\text{gdzie } \xi = y - x \text{ oraz } \eta = x$$

5. Rozwiązywanie równań z warunkami początkowymi

$$1) u(x, y) = (xy)^2$$

$$2) u(x, y) = x(y^2 - \ln x)$$

$$3) u(x, y) = -2(y - x)^2 + 5(y - 2x)^2$$